

Aplicații ale calculului vectorial în topografie

Ovidiu IACOBESCU, Angela PAICU

1. Premize

Așa cum este cunoscut din matematică și mecanică, vectorul poate fi definit ca un obiect având direcție și mărime. Pentru a fi în concordanță cu notații consacrate și folosite deja (Iacobescu, 2003), un vector va fi desemnat folosind săgeți de tipul \overrightarrow{AM} , \vec{v} sau cu caractere îngroșate \mathbf{AB} sau \mathbf{v} . Mărimea vectorului, denumită și „normă” sau „modul” se va indica prin simbolurile $|\overrightarrow{AB}|$ sau $|\vec{v}|$. Exemple de folosire a vectorilor se întâlnesc în matematică, fizică, mecanică, când aceștia reprezintă forțe, viteze, accelerații, câmpuri etc.

Topografia folosește o serie de elemente de bază (distanță înclinată, orizontală, unghi vertical și orizontal, orientare, suprafață) având semnificația clar definită într-un sistem cartezian de axe. Sistemul propriu, este acela din figura 1, unde axa „x” este orientată spre nordul geografic, axa „y” spre est, iar axa „z” indică înălțimile punctelor față de nivelul Mării Negre în sistemul „Marea Neagră 1975”. Vectorii \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , sunt versorii axelor de coordonate, având semnificație de vectori unitari ($|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$) și formând o bază ortonormală. Urmărind notațiile din figura 1 și regulile de scriere a produsului vectorial pentru vectorii unitari rezultă un sistem de referință stâng.

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \quad ; \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \quad , \quad (1)$$

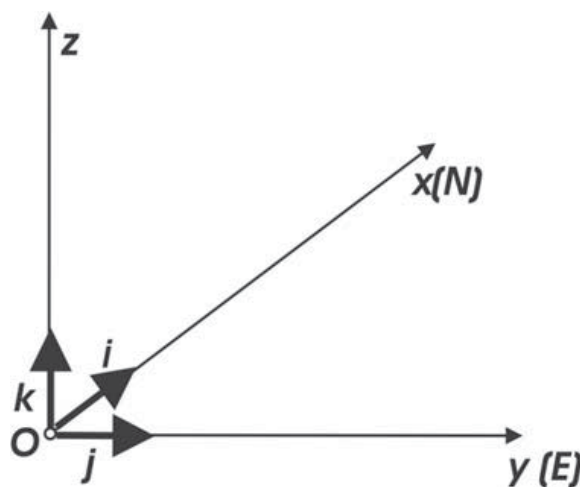


Figura 1: Sistemul de referință cartezian și versorii axelor de coordonate
Figure 1: Cartesian system and unit vectors \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} ;

Dacă în acest sistem de referință se consideră un punct $A(a_x, a_y, a_z)$, se definește vectorul de poziție \mathbf{r}_A ca o combinație între vectorii unitari \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} și componentele lui \mathbf{r}_A în baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Aceste componente reprezintă proiecțiile modului pe direcțiile definite de \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , ca în figura 2:

$$\mathbf{r}_A = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (2.a)$$

Mărimea vectorului \mathbf{r}_A se scrie:

$$|\mathbf{r}_A| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.b)$$

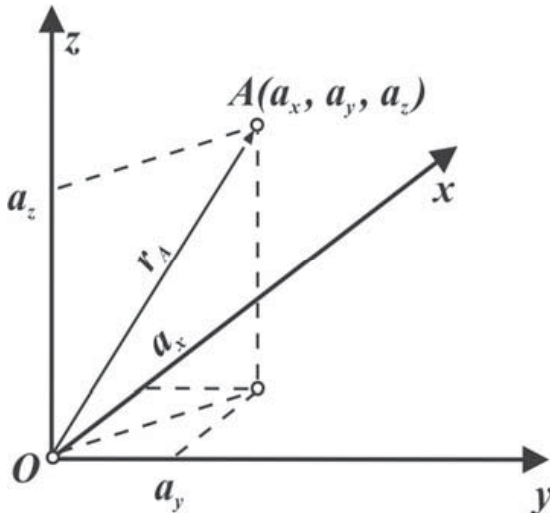


Figura 2. Vectorul de poziție și componentele lui
Figure 2. Position vector and its components

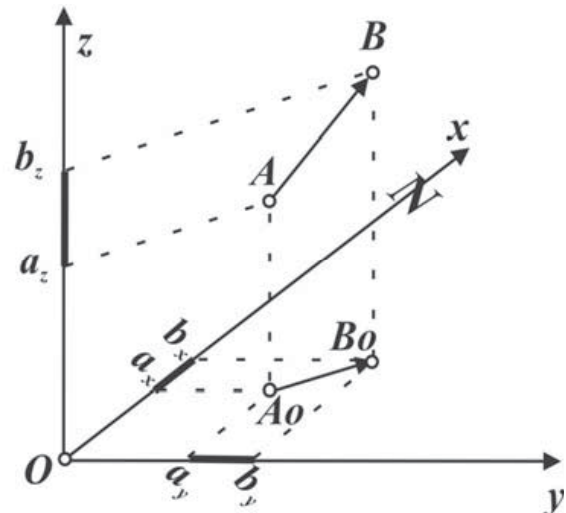


Figura 3. Componentele vectorului AB
vector AB
Figure 3. Cartesian components of AB

Un vector \mathbf{AB} în spațiul tridimensional descris, cu $A(a_x, a_y, a_z)$ și $B(b_x, b_y, b_z)$ se poate scrie (figura 3):

$$\mathbf{AB} = (b_x - a_x)\mathbf{i} + (b_y - a_y)\mathbf{j} + (b_z - a_z)\mathbf{k}, \quad (3.a)$$

iar mărimea lui este:

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2} \quad (3.b)$$

Lucrarea de față își propune ca, plecând de la aceste relații simple și de la operațiile cu vectori, să abordeze rezolvarea unor probleme curente ale topografiei.

2. Problema intersecției înainte

Intersecția înainte este procedeul topografic prin care, din punctele cunoscute (vechi) și staționabile 1 și 2 se determină, cu ajutorul vizelor orientate, coordonatele punctului nou I, de regulă nestaționabil. În problema practică, (Boș, 1993) elementele cunoscute sunt (figura 4):

- punctele vechi, din sistemul de sprijin: $1(x_1, y_1)$, $2(x_2, y_2)$, $3(x_3, y_3)$, $4(x_4, y_4)$, implicit lungimile și orientările direcțiilor 1-2 și 3-4,
- unghiurile $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rezultate în teren în urma măsurătorilor.

Se consideră direcțiile orientate ca vectori având punctul de aplicație în punctul vechi, direcția pe dreapta punct vechi – punct nou și sensul spre punctul nou, I, de coordonate necunoscute (x, y) . Simplificând, pentru o singură pereche de vize (\mathbf{v}_1 și \mathbf{v}_2) se poate scrie:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} \quad (4a)$$

$$\vec{v} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$\vec{v}_1 = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} \quad (4b)$$

$$\vec{v}_2 = (x - x_2)\vec{i} + (y - y_2)\vec{j}$$

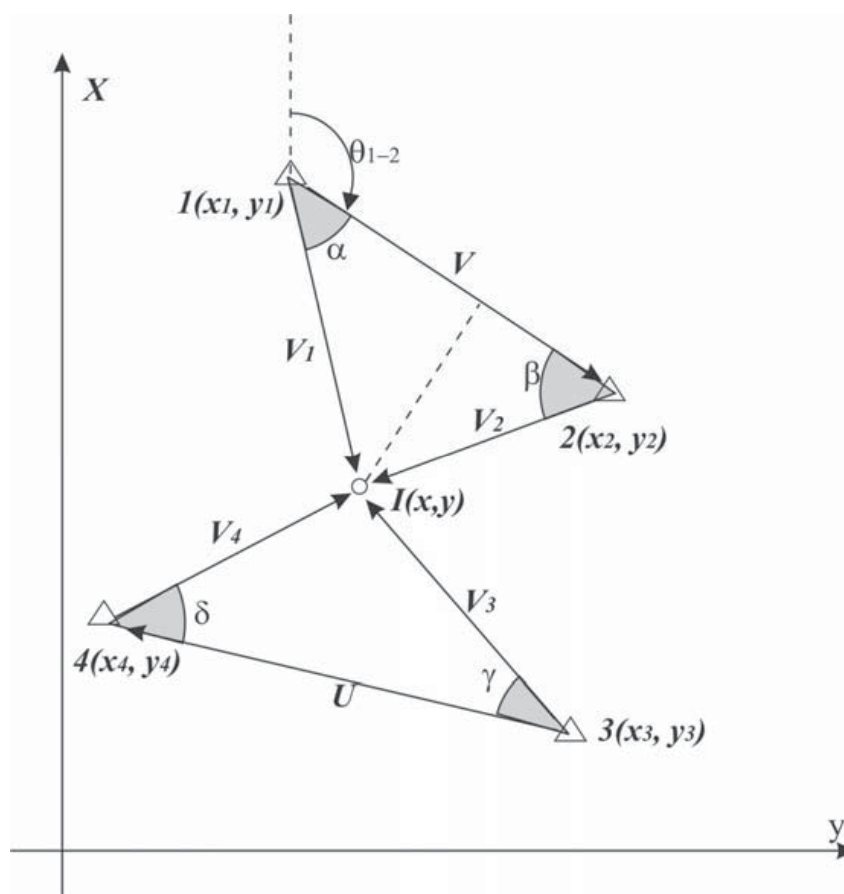


Figura 4. Intersecția înainte

Figure 4. Intersection point

Din produsele scalare între vectorii \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 și \mathbf{v} rezultă:

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v} = |\vec{v}_1| |\vec{v}| \cos \alpha \quad (5)$$

$$\vec{v}_2 \bullet \vec{v} = -|\vec{v}_2| |\vec{v}| \cos \beta \quad (6)$$

Din diferența (5) – (6) rezultă:

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \bullet \vec{v} = |\vec{v}| (|\vec{v}_1| \cos \alpha + |\vec{v}_2| \cos \beta),$$

sau, ținând cont de relația [4a]:

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_1| \cos \alpha + |\vec{v}_2| \cos \beta \quad (7)$$

Dacă în triunghiul 1-2-I se aplică teorema sinusului pentru unghiurile măsurate α și β , rezultă:

$$|\vec{v}_1| \sin \alpha = |\vec{v}_2| \sin \beta \quad (8)$$

Rezolvarea sistemului de ecuații format din relațiile (7) și (8) conduce succesiv la:

$$|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1| \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (9)$$

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_1| \cos \alpha + \frac{|\vec{v}_1| \sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta = |\vec{v}_1| \left(\cos \alpha + \sin \alpha \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right) = |\vec{v}_1| \left(\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \right) \quad (10)$$

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}| \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (11)$$

$$|\vec{v}_2| = |\vec{v}| \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (12)$$

Relațiile (11) și (12) reprezintă soluția sistemului de ecuații, ținând cont de elementele cunoscute: unghiurile α , β și modulul vectorului \vec{v} :

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (13)$$

Cu mărimea vectorului \vec{v}_1 se pot determina coordonatele plane x și y :

$$\begin{cases} x = x_1 + |\vec{v}_1| \cos(\theta_{1-2} + \alpha) \\ y = y_1 + |\vec{v}_1| \sin(\theta_{1-2} + \alpha) \end{cases} \quad (14)$$

Verificarea calculului se poate face folosind mărimea unghiului β și a vectorului \vec{v}_2 , determinarea fiind la limită:

$$\begin{cases} x = x_2 + |\vec{v}_2| \cos(\theta_{2-1} - \beta) \\ y = y_2 + |\vec{v}_2| \sin(\theta_{2-1} - \beta) \end{cases} \quad (15)$$

Poziția punctului nou, I, rezultă din media intersecției a minim 2 perechi de vize independente, pentru care calculul se face similar.

3. Problema intersecției înapoi

Intersecția înapoi este procedeul prin care punctul necunoscut (nou) $P(x, y)$ se staționează și se determină unghiurile orizontale spre punctele cunoscute (vechi) 1, 2, 3 etc. În acest caz, elementele cunoscute sunt (figura 5):

- punctele vechi, din sistemul de sprijin: $1(x_1, y_1)$, $2(x_2, y_2)$, $3(x_3, y_3)$ etc, implicit lungimile și orientările direcțiilor 1-2, 2-3 și 3-1,
- unghiurile α , β , γ , rezultate în teren în urma măsurătorilor.

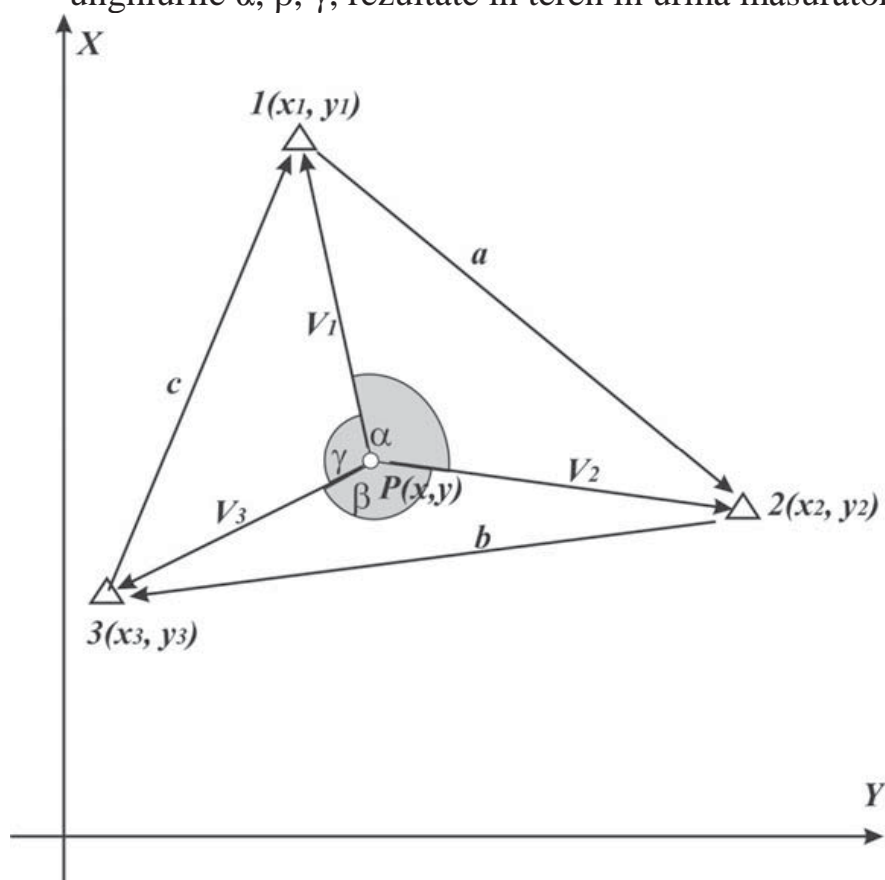


Figura 5. Intersecția înapoi
Figure 5. Resection point

Vectorii \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 sunt orientați spre punctele noi și au expresiile:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = (x_1 - x)\vec{i} + (y_1 - y)\vec{j} \\ \vec{v}_2 = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j} \\ \vec{v}_3 = (x_3 - x)\vec{i} + (y_3 - y)\vec{j} \end{cases}, \quad (16)$$

iar relațiile vectoriale care se pot scrie în triunghiurile formate sunt:

$$\begin{cases} \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{a} \\ \vec{v}_3 - \vec{v}_2 = \vec{b} \\ \vec{v}_1 - \vec{v}_3 = \vec{c} \end{cases} \quad (17)]$$

Se pot scrie produsele scalare:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 &= |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos \alpha \\ \vec{v}_2 \bullet \vec{v}_3 &= |\vec{v}_2| |\vec{v}_3| \cos \beta \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{cases} (x_1 - x)(x_2 - x) + (y_1 - y)(y_2 - y) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} \cdot \cos \alpha \\ (x_2 - x)(x_3 - x) + (y_2 - y)(y_3 - y) = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2} \cdot \cos \beta \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului de ecuații în x și y care rezultă din dezvoltarea produselor este practic dificilă. Problema abordării vectoriale a intersecției înapoi, deși aparent simplă, conduce la sisteme dificil de rezolvat. Rezolvările încercate nu au dus la o soluție ușor de aplicat, așa că problema rămâne încă în studiu.

4. Drumuire sprijinită

Drumuirea încadrată între punctele A, B cunoscute este traseul în care laturile A-1, 1-2 etc sunt legate între ele prin elemente măsurate în teren: unghiuri orizontale și verticale, distanțe, diferențe de nivel.

Dacă se consideră un vector spațial oarecare ij și vectorii de poziție corespunzători capetelor, se poate scrie:

$$\mathbf{r}_i + \mathbf{ij} = \mathbf{r}_j \quad (19)$$

Să considerăm (figura 6) că ij este o distanță măsurată de la punctul „i” dat (x_i, y_i, z_i) spre punctul „j” nou, de modul „d”. Ținând cont de valorile și semnificațiile cunoscute pentru orientarea θ_{ij} și unghiul zenital z , se poate scrie:

$$\begin{cases} \vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \\ \vec{r}_j = x_j \vec{i} + y_j \vec{j} + z_j \vec{k} \\ \vec{ij} = (d \cdot \sin z \cdot \cos \theta) \vec{i} + (d \cdot \sin z \cdot \sin \theta) \vec{j} + (d \cdot \text{ctgz}) \vec{k} \end{cases}, \quad (20)$$

și scalar:

$$\mathbf{j} = \begin{cases} x_j = x_i + d \cdot \sin z \cdot \cos \theta \\ y_j = y_i + d \cdot \sin z \cdot \sin \theta \\ z_j = z_i + d \cdot \text{ctgz} \end{cases} \quad (21)$$

În mod similar, dacă facem referire la drumuirea AB (figura 7), se pot calcula coordonatele punctului B_d obținut din aproape în aproape:

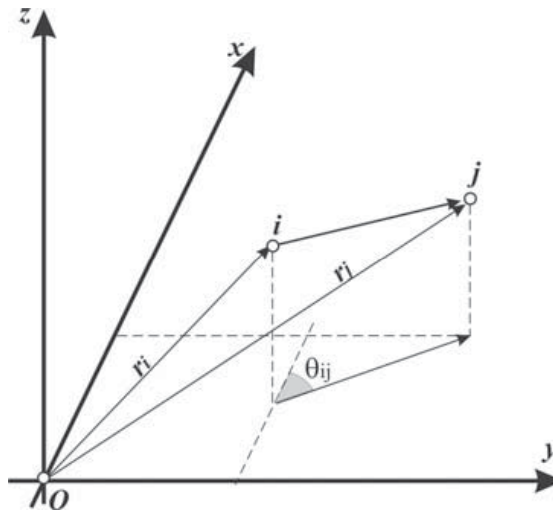


Figura 6. Vector spațial și vectori de poziție

Figure 6. Vector in space and position vectors

$$B_d = \begin{cases} x_B^d = x_A + d_{A1} \sin z_1 \cos \theta_1 + \dots + d_{5B} \sin z_5 \cos \theta_5 = x_A + \sum_{i=1}^5 d_i \sin z_i \cos \theta_i \\ y_B^d = y_A + d_{A1} \sin z_1 \sin \theta_1 + \dots + d_{5B} \sin z_5 \sin \theta_5 = y_A + \sum_{i=1}^5 d_i \sin z_i \sin \theta_i \\ z_B^d = z_A + d_{A1} \operatorname{ctg} z_1 + \dots + d_{5B} \operatorname{ctg} z_5 = z_A + \sum_{i=1}^5 d_i \operatorname{ctg} z_i \end{cases} \quad (22)$$

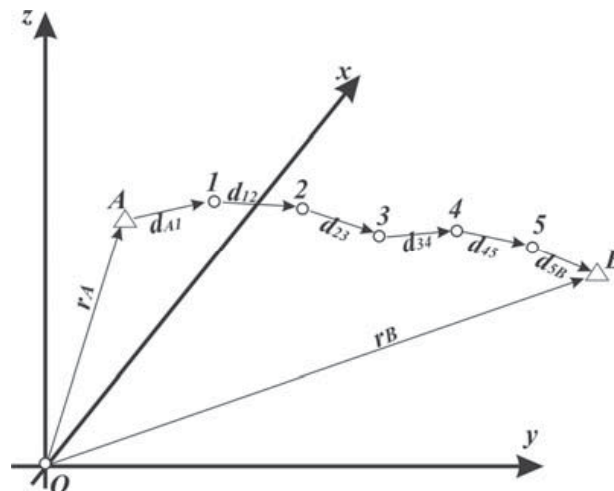


Figura 7. Drumuirea încadrată

Figure 7. Traverse between A and B

Eroarea comisă se determină ca diferență între coordonatele punctului B_d și B cunoscut, iar compensarea se face după fiecare axă, dacă erorile sunt tolerabile. Coordonatele punctelor noi (1, 2, 3...) se obțin dacă în relația (asta de mai sus), suma se face pentru indicele 1, 2, 3 . . . ș.a.m.d.

Abordarea drumuirii prin calcul vectorial nu conduce la soluții diferite și spectaculoase, dar oferă o serie de avantaje pentru utilizator:

- elementele care intervin în calcul se pot, toate, exprima folosind calculul vectorial (unghiuri orizontale, verticale, orientări, distanțe orizontale și verticale),

- ținând cont de sensul de parcurs al drumuirii, orientarea distanțelor este intuitivă și conduce la o mai bună înțelegere a calculelor. Coordonatele relative sunt exprimate, de asemenea, simplu și în concordanță cu semnificația lor, atât ca mărime, dar mai ales ca semn. Același lucru se poate susține despre vectorul eroare și componentele lui pe axele de coordonate.

5. Transcalculări topografice

În cazul în care se lucrează în sisteme de referință diferite, transcalculările servesc la transpunerea punctelor, prin calcul, dintr-un sistem în altul. Problema poate avea aspect de transcalculare geodezică, dintr-un sistem de proiecție în altul (din Gauss în Stereografic 70), sau de transcalculare topografică (cazul considerat în lucrarea de față), pe distanțe scurte, pe care efectul de curbură a Pământului poate fi neglijat. Din punct de vedere vectorial, problema se pune în a scrie componentele unui vector dintr-un sistem de referință în altul, atunci când se cunoaște legătura între originile celor două sisteme.

Se consideră sistemele de referință carteziene de origine O , cu axele x, y, z și versorii $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ și $O'(x_0, y_0, z_0)$, cu axele x', y', z' și versorii $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$.

În cazul cel mai general (figura 8) se poate scrie că între versori există legătura:

$$\begin{cases} \vec{i}' = a_{11} \vec{i} + a_{12} \vec{j} + a_{13} \vec{k} \\ \vec{j}' = a_{21} \vec{i} + a_{22} \vec{j} + a_{23} \vec{k} \\ \vec{k}' = a_{31} \vec{i} + a_{32} \vec{j} + a_{33} \vec{k} \end{cases} \quad (23)$$

Legătura între coordonatele sistemului nou și cel vechi se poate scrie:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_{11} x' + a_{21} y' + a_{31} z' \\ y = y_0 + a_{12} x' + a_{22} y' + a_{32} z' \\ z = z_0 + a_{13} x' + a_{23} y' + a_{33} z' \end{cases} \quad (24)$$

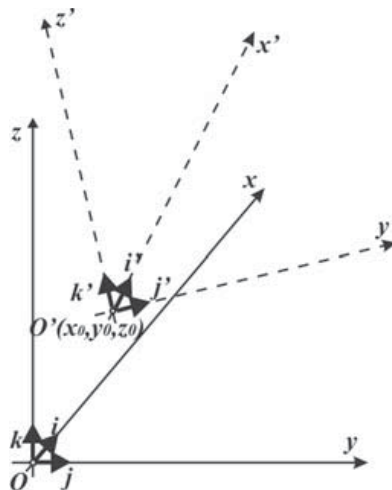


Figura 8 Cazul general al transcalculărilor
Figure 8 Transcalculations. The general case

Soluțiile pentru câteva cazuri particulare:

- când originile sistemelor coincid, este cazul unei rotații generale de axe (figura 9). În acest caz, relația de mai sus ține cont că $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,

- când sistemele sunt translate unul față de altul în plan orizontal (figura 10), relația devine:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

- când sistemele sunt translate și rotite în planul orizontal (figura 11)

se obțin relațiile binecunoscute:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

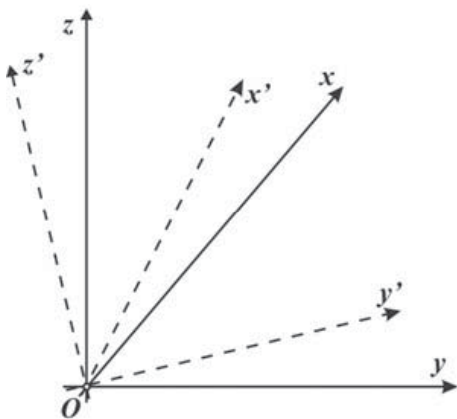


Figura 9. Cazul originii comune
Figure 9: Case of common origin

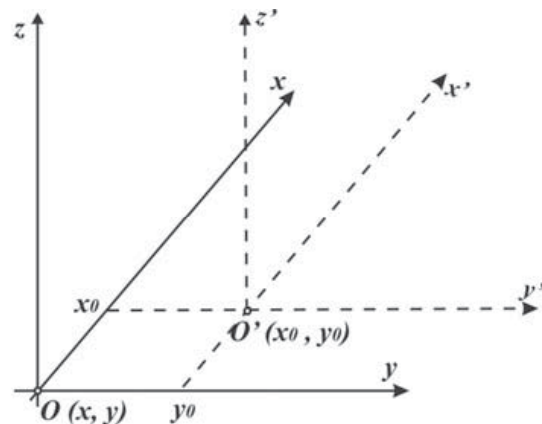


Figura 10. Translație în plan orizontal

Figure 10 Translation in horizontal plane

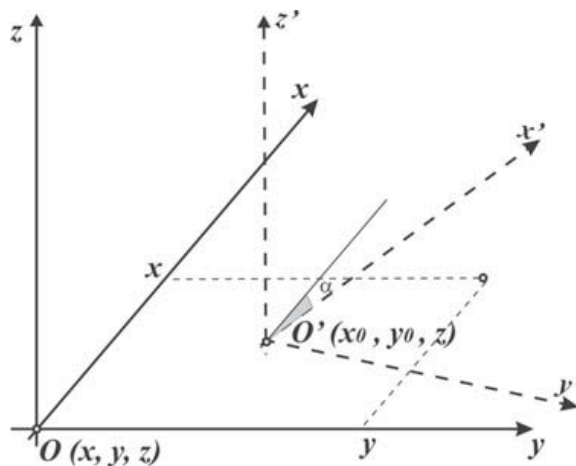


Figura 11 Cazul translației și rotirii
Figure 11. Rotation and translation

6. Concluzii

Calculul vectorial are avantajul că oferă unor mărimi o viziune concretă, în plan sau spațială, care este folositoare pentru intuirea acestor mărimi. În topografie, unde se lucrează cu direcții orientate într-un sistem de axe dat,

asimilarea mărimilor prin prisma calculului vectorial poate fi folositoare măcar în procesul educativ.

Bibliografie

Iacobescu, O., 2003, Some Applications of Vector Calculus in Topography
Boș, N., 1993, Topografie, Editura Didactică și Pedagogică,

Abstract

Applications of vectorial calculus in topography

All the basis elements may be expressed through vector calculus, obtaining scalar relations, known from analytical geometry. In vector calculus, using orientated distances (the direction is the same with the crossing way), all the elements are better intuited, according to their correct meaning.

It is important to remind that we are in a Cartesian three-dimensional space, where each point and each direction can be defined with vector's support.

Using vector operations it is possible to make traverse computations, resection and intersection points etc.

Keywords: vectorial calculus, topography, transcalculation

Șef lucrări dr. ing. Ovidiu IACOBESCU,
Universitatea „Ștefan cel Mare” Suceava
Facultatea de Silvicultură,
oiacobescu@yahoo.com

Șef lucrări drd. matematician Angela Paicu,
Universitatea „Ștefan cel Mare” Suceava
Facultatea de Silvicultură