# Contribuții la determinarea distribuțiilor şi a ecuațiilor de regresie pentru principalele caracteristici dendrometrice ale arboretelor echiene

Liviu IACOB

## 1. Stadiul cunoştințelor

Complexitatea deosebită a biosistemelor forestiere ca şi a fenomenelor naturale cu caracter aleatoriu care le influențează existența au determinat adoptarea unor procedee matematice specifice, de evidențiere cantitativă şi calitativă a caracteristicilor biometrice ale arboretelor. Variabilitatea extrem de mare a seturilor de date referitoare la o anumită caracteristică biometrică, care provin din surse diferite şi/sau de la cercetători diverşi, a dus la interpretări foarte variate ale aceluiaşi fenomen studiat. Dacă amintim numai cazul distribuției diametrelor în arboretele pure echiene şi la faptul că, până la această dată, nu s-a ajuns la un punct de vedere comun asupra unei formulări matematice general acceptate pentru acest tip de distribuții, putem realiza dificultățile pe care le întâmpinăm la stabilirea expresiilor pentru distribuțiile multifactoriale şi a ecuațiilor de corelație între diversele mărimi dendrometrice.

Stadiul actual al cunoştințelor în domeniul ecuațiilor de corelație dintre înălțimile şi diametrele arborilor a fost amplu dezbătut de V. Giurgiu in Silvologie, vol. II, din anul 1999, unde se reliefează tocmai dificultățile metodologice în conturarea unui punct de vedere unitar în elaborarea ecuațiilor de regresie dintre aceste caracteristici dendrometrice.

Ca o alternativă la situația de mai sus, a fost prezentat în lucrări anterioare (Iacob, L.A., 1995, 1998 şi 1999), un procedeu rapid de determinare a funcțiilor unimodale de distribuție a frecvențelor bazat pe abscisa punctului de extrem (modulului sau modei).

## 2. Procedeu de determinare a funcțiilor de distribuție a frecvențelor bazat pe abscisa punctului de extrem (mòdei)

Se porneşte de la observația potrivit căreia, toate distribuțiile monofactoriale ale frecvențelor teoretice pentru caracteristicile dendrometrice (diametre, înălțimi etc.) din arboretele echiene sunt unimodale (adică, prezintă un singur punct de extrem, de regulă, un maxim).

Se constată că abscisa modei (M) verifică, în toate situațiile, ecuația generatoare (1) a distribuției frecvențelor p(x), (pe domeniul de definiție D studiat) prin intermediul unei funcții generatoare f(x) (care există şi este unic determinată):

$$\Sigma p(x)\cdot f(x)=(\Sigma p(x))\cdot f(M) \quad (1)$$

Adăugând la ecuația de mai sus condițiile abscisei punctului de extrem ($\partial p(M)/\partial M=0$) şi de normare a distribuției se poate obține, prin intermediul multiplicatorilor lui Lagrange, expresia generală a distribuției frecvențelor (monofactoriale şi unimodale) p(x) în funcție de abscisa modei:

$$p(x) = EXP(a\cdot\int f(x)\cdot\partial x+bx+c) \quad (2)$$

unde *EXP* este operatorul funcției exponențiale (numărul Euler **e)** iar *a, b* şi *c* sunt parametri constanți care se pot determina din următoarele condiții: de normare a funcției de distribuție, de extrem a curbei unimodale şi de calcul a variantei specifice (din expresia entropiei; Iacob, LA, 1998).

Se demonstrează, cu uşurință, unicitatea formei unei distribuții p(x) căreia i se cunoaşte forma funcției generatoare a modei (f(M)) şi reciproc (a nu se confunda cu funcția generatoare tip *z* din statistică !).

După calcule elementare şi ținând cont de proprietățile funcțiilor modale monofactoriale (printre care şi aceea a integralei din valoarea absolută a derivatei funcției de distribuție a frecvențelor) se obține *forma generală* (p(x)) *a distribuției normate a frecvențelor teoretice asociată oricărei funcții generatoare f (x)*:

$$p(x) =(\lambda\cdot[x]/(4\cdot|w|))\cdot EXP(-(F(x)-F(M)-(x-M)\cdot f(M))/(2w)) \quad (3)$$

unde:

$\lambda=\int p(x)\cdot|f(x)-f(M)|\cdot\partial x$ este indicele de normare absolut; (3.1)

$w= \int p(x)-((F(x) - F(M)-(x-M)\cdot f(M)) \cdot\partial x$ – varianța generalizată; (3.2)

$F(x)= \int f(x)\, \partial x$ - primitiva funcției generatoare; (3.3)

Unde: [x] este mărimea claselor de valori ale caracteristicii x;

|r| este valoarea absolută a numărului real r (în expresia lui λ.).

Se demonstrează că varianta generalizată are expresia:

$$w= \overline{F} - F(M) -( \overline{x} -M)\cdot f(M) \quad (4)$$

unde:

$\overline{F}$ este media funcțiilor F(x) în raport cu p(x) pe domeniul D; (4. l )

M - abscisa punctului de extrem a funcției f(x) (moda, modulul);

x - media aritmetică a caracteristicilor măsurate.

Varianta generalizată (w) coincide cu dispersia teoretică (o/) numai în cazul distribuției normale (care are ca funcție generatoare media aritmetică).

Este recomandată folosirea celor 4 parametrilor naturali (M, A., w, x) în determinarea distribuției frecvențelor teoretice ale unei caracteristici dendrometrice în locul dispersiei ($a^2$), atunci când nu avem de-a face cu distribuția normală, deoarece se evită introducerea artificială a unor erori sistematice atât în formula de calcul a variantei (4), în cea a indicelui de normare (A,) cât şi în cea sintetizatoare,a frecvențelor teoretice (3). Validarea modelului teoretic prezentat mai sus se poate face, pentru orice funcţie generatoare aleasă, prin atribuirea unor valori arbitrare (compatibile cu modelul) parametrilor *a, b* şi *c* în expresia distribuţiei frecvenţelor teoretice (2), apoi prin calculul parametrilor naturali M, X, w şi x în baza cărora se poate constata că distribuţia normată (3) coincide cu distribuţia de tip (2).

Problema găsirii celei mai potrivite repartiţii teoretice, care să descrie în mod adecvat un set de date (fitarea repartiţiilor), se reduce la determinarea funcţiei generatoare a modei (şi reciproc). Cu alte cuvinte, cunoaşterea faptului că abscisa modei este o medie statistică de un anumit tip (armonică, aritmetică, de ordinul doi etc.) este suficientă pentru a determina, în mod unic, expresia distribuţiei frecvenţelor unei caracteristici dendrometrice.

## 3. Aplicaţii ale funcţiilor generatoare şi a distribuţiilor unimodale în silvicultură

Pe baza datelor provenite din măsurători, pentru principalele caracteristici dendrometrice ale unor arborete echiene din judeţele Botoşani şi Suceava, cât şi a celor din bogata literatură de specialitate existentă la nivel naţional şi pe plan mondial, se poate concluziona că funcţiile generatoare au expresii bazate pe monoame ($f(x)=x^m$), de grad raţional, cu $m \in$ e[-2;+2]. Se prezintă, cu caracter provizoriu, cele mai des întâlnite funcţii generatoare şi distribuţii ale frecvenţelor teoretice pentru unele caracteristici dendrometrice din arboretele echiene:

a) Atunci când abscisa punctului de extrem este exprimată prin media aritmetică ($M = \bar{x}$) rezultă funcţia generatoare: $f(x)=x$ şi distribuţia:

$$P(x)= (\lambda\cdot[x]/2\sigma^2 )\text{-EXP}(-x^2+2\, x\, \bar{x} - x^2 )/(2\sigma^2) \qquad (5)$$

adică expresia binecunoscută a distribuţiei **normale.**

b) Distribuţia normală caracterizează cu precădere fenomenele fizice care implică mase, gravitaţie etc., dar este mai rar întâlnită în dendrometrie. b) în cazul în care abscisa punctului de extrem este media armonică (M=A), funcţia generatoare este $f(d)=l/d$ iar expresia distribuţie^ frecvenţelor este de tip **gamma:**

$$p(d)=\{[d/(\bar{d}-A)]^{\wedge}[A/(\bar{d}-A)]\}\text{-EXP}[-d/(\bar{d}-A)) \qquad (6)$$

Distribuţia prezintă o asimetrie pronunţată de stânga şi caracterizează, în general, fenomenele câmpului electric (lungimile de undă), în expresia (6) se foloseşte relaţia particulară dintre media geometrică (G) cu mediile aritmetică şi armonică (valabilă numain cazul distribuţiei gamma) în care varianta:

$$w=\ln(G/A)-(\bar{d}-A)/A= - 0{,}5(\bar{d}-A)/A \qquad (6.1)$$

Din măsurătorile efectuate în arboretele echiene, pure sau amestecate, se constată, în mod sistematic, că media armonică a diametrelor (măsurate la 1,3 m.) este abscisă a punctului de maxim a distribuţiilor experimentale, pentru fiecare specie în parte (fig. l).

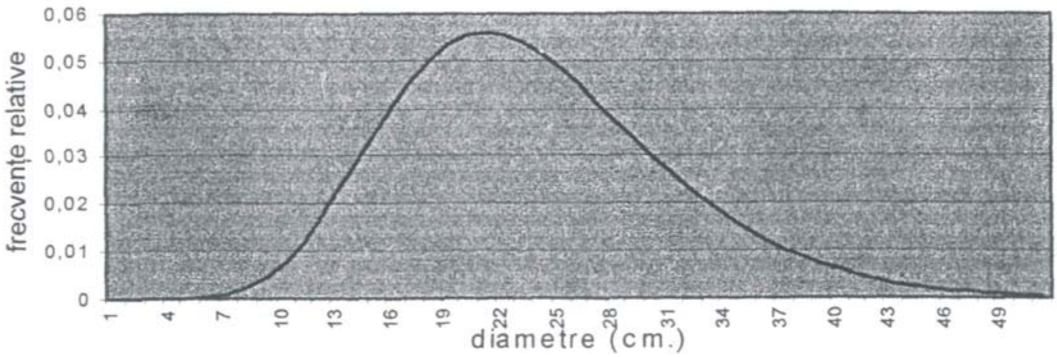


**Figura 1. Distribuția diametrelor într-un arboret pur echien (funcția generatoare f (d) = 1/d)**
**Figure 1. Diameter distribution in an even age stand**

Atunci când moda distribuției diametrelor este nulă (M=A=0) distribuția gamma "degenerează" în distribuția exponențială negativă, de tip Meyer, ceea ce permite unificarea tipului de distribuții pe clase de diametre atât la speciile din arboretele echiene cât şi la cele din arboretele pluriene (de tip grădinărit).

c) Pentru distribuția frecvenței înălțimilor, la speciile din arboretele echiene, datele experimentale au validat ca abscisă a modei media de gradul doi:

$$(M=(M_2)^{0,5}),$$

de unde rezultă funcția generatoare:

$$f(x)=h^2$$

şi

$$p(h)=\lambda \bullet [h]/(4-|w|))\cdot EXP((h^3/3-M_2^{1,5}/3-(h-M_2^{0,5})-M_2)/(-2\cdot w)) \quad (7)$$

unde:

$w=M_3/3+2\cdot M_2^{1,5}/3-h\cdot M_2$

$M_3$ este media de gradul trei.

Acest tip de distribuții prezintă asimetrie de dreapta (figura 2) şi poate fi folosit - atunci când abscisa modei este nulă - şi pentru modelarea repartiției înălțimilor pentru speciile din arboretele grădinărite.

d) Distribuția arborilor din aceeaşi specie într-un arboret echien, pe clase de volume, confirmă constatările cercetărilor anterioare (V. Giurgiu, 1979) după care gruparea arborilor se face în categoriile de volume inferioare, curba prezentând o asimetrie mai mare decât cea a curbei de frecvențe a diametrelor. Funcția generatoare identificată este de forma: $f(v)=l/v^{0,5}$ cu media $M_{-0,5}$ iar funcția de distribuție a frecvențelor imită distribuția normală atunci când se introduce transformarea $x=v^{0,5}$:

$$p(v)=(\lambda\cdot[v]/4|w|)\cdot EXP(-((v\cdot M_{-0,5})^{0,5}-(M_{-0,5}^{0,5})^2/(2\cdot w)) \quad (8)$$

unde:

$w=2\cdot M_{0,5} - v\cdot M_{-0,5}-(M_{-0,5})^{-1}$

$M_{0,5}$ este media de ordin 0,5 (8.1)

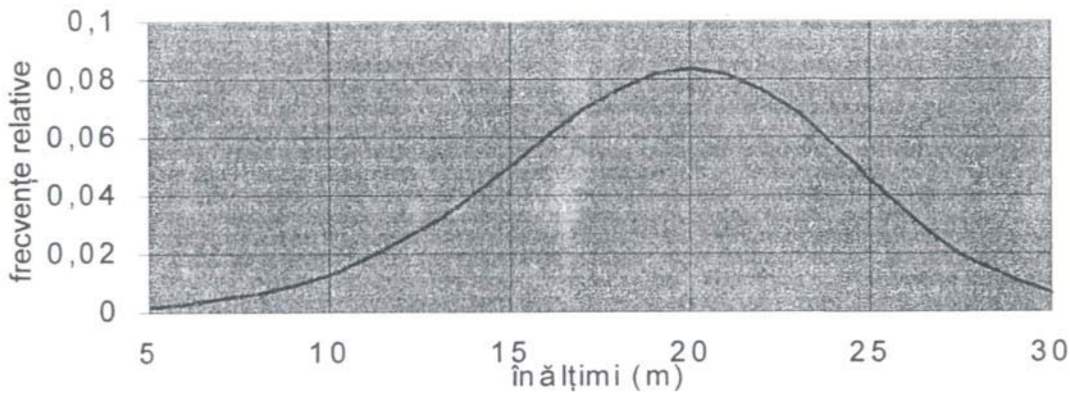


**Figura 2. Distribuția înălțimilor în arborete pure echiene (funcția generatoare f (h) = h^2)**
**Figure 2. Height distribution in even age stands**

e) Distribuția numărului de arbori/ha în funcție de vârstă (t) în arboretele echiene trebuie să țină cont de forma generală a funcției generatoare a timpului (vîrstei), formă obținută din analizarea ecuației a II -a a lui Kepler coroborată cu expresia frecvențelor în cazul mişcărilor periodice, pentru care rezultă: f(t)=l/(t + a), unde *a* este un parametru constant în timp. Se obține distribuția descrescătoare în timp a numărului de arbori la hectar în arboretele echiene:

$$p(t)=b\cdot (t+a)^{a}\cdot EXP(-c\cdot t) \qquad (9)$$

unde *b* şi *c* sunt parametri constanți.

Pentru *c*=1 distribuția numărului de arbori prezintă particularitatea importantă că valoarea parametrului *a* se identifică cu timpul scurs între momentul genezei seminței şi momentul răsăririi puietului, iar pentru arboretele provenite din tăieri în crâng (lăstari), cu vârsta la care s-a executat tăierea arboretului mamă. Observația este importantă deoarece aduce argumente plauzibile privind faptul că, fiziologic, arboretele regenerate vegetativ pornesc în viață cu ceasul cronologic deja fixat la vârsta plantelor mamă (deci sunt fiziologic îmbătrânite).

## 4. Cuantificarea modei în cazul distribuțiilor unimodale

Faptul că în arboretele echiene pot coexista, în mod armonios, mai multe specii cu exigențe diferite față de factorii de mediu, ridică problema existenței, şi apoi, a determinării acelor raporturi matematice care să exprime corelațiile între anumite mărimi dendrometrice specifice populațiilor de arbori studiate.

Problema are caracter general pentru sistemele fizice echilibrate în care se constată regularități, exprimate sub formă de legi (privind spre exemplu spectrele atomice, distanțele medii ale planetelor față de Soare etc.), fiind studiată de capitolul special al fizicii teoretice dedicat relațiilor de cuantificare.

Analiza sistematică a seturilor de date privind distribuția frecvenței apariției unei anumite caracteristici dendrometrice (diametre la 1,3 m., înălțimi, volume etc.) pentru specii diferite din arboretele echiene amestecate pune în evidență faptul că moda acestora (M, abscisa punctelor de extrem) este într-o relație de legătură cu varianța generală (w) care se exprimă printr-o ecuație, de necunoscută M, şi care include numerele întregi, de forma:

$$k\cdot\int EXP(F(M)/w)\cdot\partial M = n\cdot\pi \qquad (10)$$

unde:

k este un parametru de calibrare,
n este un număr întreg (de regulă pozitiv),
$\pi$=3,1415
F(x) este primitiva funcției generatoare f(x).

Relația de cuantificare (10) se obține din expresia, cu caracter mai larg de generalitate, a unei funcții de distribuție a frecvențelor unei caracteristici măsurabile (x), de modă (M) şi variantă (w), distribuție ce include şi o componentă complexă:

$$p(x,M)=EXP[A(x,M)+i\cdot B(M)) \qquad (11)$$

unde $i^2$=-l; componenta reală A(x,M) se identifică, la distribuțiile unimodale de tipul (3), chiar cu puterea exponențialei iar componenta imaginară B(M) depinde numai de moda M (însă în problemă apare şi varianța w cu rol de calibrare). Condiția ca distribuția p(x,M) să nu aibă componente imaginare oferă instrumentul matematic de cuantificare a modei (M) prin impunerea condiției (10) în care apar numerele întregi.

Pentru acest tip de distribuții, caracterizate de funcția generatoare f(x), ecuația de cuantificare a modelor (M) este de forma:

$$2\cdot w\cdot\partial^2 p(M)/\partial M^2 + p(M)\text{-}\partial f(M)/\ \partial M=0 \qquad (12)$$

fiind similară ecuației lui Schrodinger, dar care nu este postulată (aşa cum se întâmplă în mecanica cuantică) ci este stabilită pe cale directă.

Se precizează că, după rezolvarea ecuației (12), condiția de cuantificare a modelor (M) pentru distribuțiile p(M) este:

$$\partial p(M)/\partial M=0 \qquad (13)$$

care generează ca soluții o mulțime de valori ce pot aparține unui interval compact sau, de cele mai multe ori, acestea sunt discrete *(spectrul de valori modale* sau *mulțimea spectrală* asociată funcției generatoare f(x)).

In cazul distribuțiilor specifice din domeniul silvic, ecuația de cuantificare de mai sus se rezolvă prin metoda Riccati, numai după determinarea unei soluții particulare, după cum urmează:

4.1) ecuația de cuantificare a abscisei punctelor de maxim pentru distribuția diametrelor este de forma:

$$2\cdot w\cdot\partial^2 p(A)/\ \partial A^2=p(A)/A^2 \tag{14}$$

cu w negativ, care admite soluția particulară: $\partial \boldsymbol{ln}\ p(A)/\ \partial A=-N/A$ (N-parametru, dependent de varianța w).

4.1a) Pentru $x\geq 5\cdot A$, soluțiile ecuației (14) se încadrează pe un interval real continuu ceea ce corespunde cazului distribuției diametrelor speciilor în arboretele pluriene, respectiv în arboretele grădinărite. Condiția ca media aritmetică a diametrelor ( x) să fie mai mare de cel puțin cinci ori decât media armonică (A) a acestora se poate constitui într-un criteriu important de verificare a caracterului plurien sau echien al unui arboret.

Cazul când $\bar{x}=5\cdot A$ (adică w=-2), este întâlnit la spectrul energetic al atomului de hidrogen, cu mare impact asupra fotosintezei plantelor datorită energiei eliberate de arderea hidrogenului în Soare.

4.1b) Pentru $A\leq\ \bar{x}\ \leq 5\cdot A$ rezultă expresia cuantificată a abscisei punctelor de extrem (modei) pentru distribuțiile diametrelor la speciile din arboretele echiene sau cvasiechiene în următoarele subcazuri:

- pentru $A\leq\ \bar{x}\ \leq\ 3\cdot A$ sau $3\cdot A\leq\ \bar{x}\ \leq 5\cdot A$ rezultă $\boldsymbol{M=a\cdot n^b}$**,** unde *a* și *b* sunt parametri pozitivi, funcție de varianța w;
- pentru $\bar{x}\ = 3\cdot A$, adică w=-l rezultă $\boldsymbol{M=EXP}(a\cdot n+b)$.

4.2) Pentru înălțimi, volume ale arborilor ca şi pentru multe alte caracteristici dendrometrice ale arboretelor echiene, în cazul când funcția generatoare este un monom de grad diferit de -l, ecuațiile de cuantificare pentru mode, de tipul (10), sunt transcendente şi se pot rezolva numai prin metode de aproximare.

Dintr-o ecuație de tipul de mai sus se pot deduce, spre exemplu, soluții cuantificate pentru modele distribuțiilor înălțimilor, care indică gruparea speciilor în plafoane şi etaje.

Existența ecuațiilor spectrale în cazul distribuțiilor modale oferă argumente pentru a stabili raporturile armonioase între caracteristicile unor populații diferite ce alcătuiesc o colectivitate. Se deschid astfel perspective de studiu a relațiilor optime între caracteristicile (diametre, înălțimi, volume etc.) speciilor arborescente şi, pe această bază, devine posibilă abordarea problemei întocmirii unor tabele de producție pentru arboretele amestecate.

O întrebare la fel de importantă o constituie problema duală, ca pe baza unui spectru cunoscut de valori modale (dependent de numerele întregi n) să reconstituim forma funcției generatoare şi a distribuției caracteristicii în studiu.

Probleme ca cea a spectrelor atomice (ridicată de Balmer şi teoretizată de N. Bohr) precum şi cea a distanțelor medii dintre planete şi Soare (legitatea Titius-Bode) sunt tipice pentru domeniul de referință al fizicii.

Răspunsul îl constituie relația (10) în care se exprimă numărul natural n în funcție valoarea modei (M), din care rezultă expresia funcției generatoare:

$$f(M)=w\cdot(\partial^2\cdot\mathbf{n}/\partial M^2)/(\partial n/\partial M) \qquad (15)$$

Pe această bază se poate constata că spectrul valorilor modale de tipul seriei centrate în $\rho^{2n-1}$ (unde $\rho=(5^{0,5}-l)/2$), identificate ca centre de aglomerare a valorilor pentru distribuția procentului de frunziş al arborilor din plafonul n în arboretele echiene (Iacob, 1996), determină funcții generatoare de tipul f(M)=l/M, în strânsă legătură cu cele ale diametrelor arborilor. Această constatare confirmă încă o dată determinismul legăturilor morfologice şi fiziologice existent la plantele lemnoase din compoziția arboretelor echiene amestecate.

## 5. Ecuații de regresie pentru principalele caracteristici dendrometrice ale arboretelor echiene

Legătura corelativă dintre două sau mai multe caracteristici dendrometrice (Xj) se află într-o strânsă dependență de funcțiile de distribuție ale frecvențelor marginale pentru fiecare mărime în parte. Astfel, la trasarea curbei înălțimilor în raport cu diametrele, într-un arboret echien, se ține cont de abscisa punctelor de maxim la flecare dintre distribuțiile marginale pentru înălțimi şi respectiv, pentru diametre, deoarece în acele zone se concentrează majoritatea frecvențelor relative; de asemenea, se au în vedere variantele specifice fiecărei distribuții în parte, de mărimea lor depinzând panta curbelor de regresie; la fel de importantă este mărimea claselor de valori pentru înălțimi şi pentru diametre. Fără a intra în detalii matematice, se prezintă mai jos, rezultatele unui procedeu de determinare a formei ecuațiilor de regresie în strânsă dependență de distribuțiile marginale.

Pentru n caracteristici dendrometrice (Xj), i=l,2,...,n caracterizate, fiecare în parte, de funcțiile generatoare fj(Xj), de modele Mj, de variantele specifice Wj şi de mărimea claselor de valori [Xj], şi toate acestea sintetizate de distribuțiile marginale $P_J(X_J)$ pe domeniile compacte **Di,** prin impunerea condiției ca diferențiala totală a distribuției multifactoriale a frecvențelor (dP) să fie nulă, se deduce ecuația (generală) de regresie multiplă:

$$\Sigma\,(fi(xi- fi(Mi))[xi]/wi = 0 \qquad (16)$$

Variabilele sunt separabile iar funcțiile generatoare sunt aditive. Ecuația (16) sugerează că oricărei ecuații care descrie un fenomen fizic îi pot fi ataşate funcții de distribuție marginale, pentru fiecare variabilă în parte, şi reciproc. Pentru o singură variabilă (n=l), corelația se reduce la a considera că fiecare valoare în parte tinde să se aglomereze către abscisa punctului de extrem (moda).

### 5.1. Aplicații ale ecuațiilor de regresie în silvicultură

Datorită faptului că am definit mai sus forma funcțiilor generatoare a diametrelor (l/d), a înălțimilor ($h^2$), a volumelor ($l/v^{0,5}$) şi a vârstei arborilor (l/(t+a)) din arboretele echiene, ecuația de regresie multiplă între aceste mărimi este de forma:

$$(l/d-l/A)\cdot[d]/w_d+(h^2-M_2)\cdot[h]/w_h+(l/(t+a)-l/a)\cdot[t]/w_t+(l/v^{0,5}-M_{-0,5}))-[v]/w_v=0 \quad (17)$$

unde indicii au semnificația cunoscută. Orice eliminare sau adăugare de variabile nu schimbă forma generală a ecuației de regresie ci numai scade sau crește cantitatea de informație furnizată de aceasta, în figura *3* se prezintă exemplul modelării curbei de regresie dintre volumul arborilor și diametrul acestora la 1,3 m prin ecuația de regresie $v=d^2/(1{,}17\cdot D-0{,}17\cdot d)^2$ (linia punctată) în comparație cu formulele actuale de cubaj (liniile continue). Se observă suprapunerea aproape perfectă a curbelor atât pentru valorile mici ale diametrelor relative cât și pentru valorile supraunitare ale acestora ceea ce denotă valabilitatea procedeului de calcul propus.

Folosind variabilele: diametru - înălțime - vârstă în ecuația de regresie (17) se obține cu ușurință fenomenul de deplasare a curbelor de creștere tip diametru - înălțime. Toate corelațiile importante între variabile diametru -vârstă, înălțimi - diametre, înălțimi - vârstă etc. sunt reproduse cu fidelitate de ecuații de regresie de tipul (17) iar coeficientul de formă din ecuația trifactorială v-d-h poate fi pus în evidență cu ușurință; mai mult, acesta se poate determina, mai complet, din ecuația multifactorială v-d-h-t. Ecuațiile de regresie de tipul (16) și (17) pot fi utilizate la elaborarea tabelelor de producție, a tabelelor de cubaj ș.a.m.d. fiind foarte simple în concepție și ușor de manipulat pe mijloacele moderne de calcul.

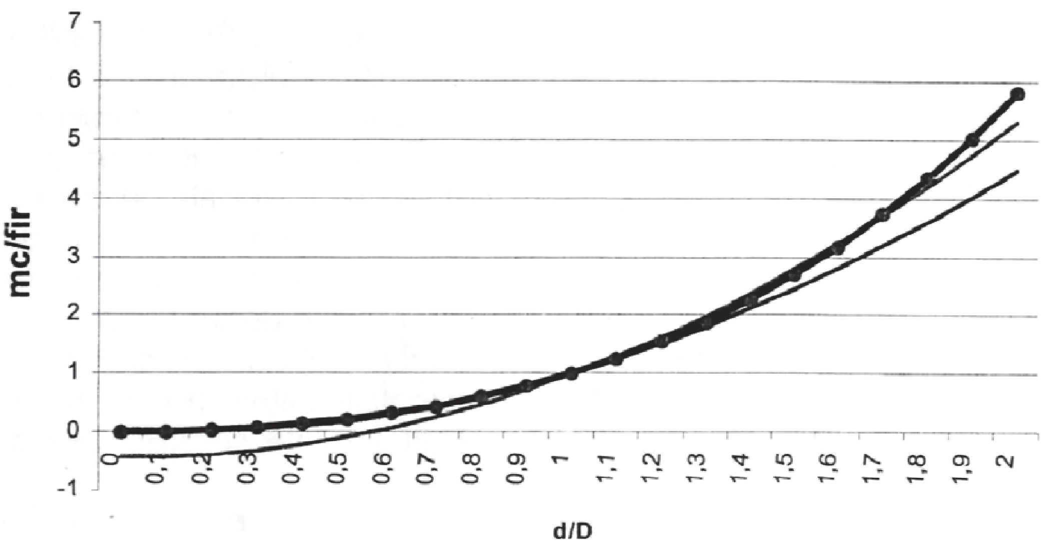


**Figura 3. Volumul arborelui în funcție de diametrul relativ**
**Figure 3. The relation between tree’s volume and the relative diameter**

### 5.2. Ecuații de regresie din domeniul auxometriei arboretelor echiene

Ecuația de regresie dintre creșterea unei mărimi dendrometrice ($i_x$) și variabilele **x** și **t** (vârsta acestora) derivă din ecuațiile de regresie de tip (16), prin diferențierea în raport cu timpul. Cu notațiile de mai sus și ținând cont de faptul că

$i_x$=dx/dt cât şi de faptul că diferenţiala ecuaţiei (16) este nulă se poate scrie ecuaţia de regresie multicriterială:

$$\Sigma ix_i\text{-}(\partial fi(xi)/\ \partial x_i)\text{-}[x_i]/w_i = 0 \qquad (18)$$

în care una dintre cele n variabile este timpul.

În cazul unei singure mărimi dendrometrice (x) ecuaţia de regresie în raport cu vârsta (din (16)) este:

$$(f(x)\text{- } f(M))\cdot[x]/w = k\cdot a\cdot t/(t+a) \qquad (19)$$

unde k este o constantă de calibrare.

Prin derivare, se poate exprima ($i_x$) atât în funcţie de timp cât şi în funcţie de x:

$$i_x\cdot(\partial f(x)/\ \partial x)\cdot[x]/w= -\ k/(t+a)^2 \qquad (20)$$

de unde rezultă ecuaţia de regresie a lui $i_x$ în raport cu x:

$$i_x =(\ k\cdot w\text{-}(f(x)\text{- } f(M))\cdot[x])^2/(f'(x)\cdot w\cdot[x]) \qquad (21)$$

Mai mult, exprimând în ecuaţia (21) funcţia generatoare f(x) - a mărimii x - în raport cu creştrea acesteia ($i_x$) se obţine forma funcţiei generatoare a creşterii g($i_x$), pe baza căreia se poate determina forma distribuţiei frecvenţelor p($i_x$).

Pentru diametre, înălţimi şi volume creşterile corespunzătoare ($i_x$) urmează curbe de distribuţie şi descriu ecuaţii de regresie cu forme cunoscute în literatura de specialitate consacrată.

Deoarece creşterea curentă (Cc) - a unui arboret echien de volum V - se identifică cu $n\cdot i_v$ iar posibilitatea de produse secundare ($Y_s$) se identifică cu $v\text{-}i_n$ (unde n este numărul de arbori pe suprafaţa dată iar *v* este volumul arborelui mediu), prin explicitarea indicilor $Cc/\mathbf{V}=i_v/v$ şi Ys=$i_n$/n în funcţie de timp (vârstă) se obţine o ecuaţie de corelaţie de tip parabolic între mărimile de mai sus, cu aplicabilitate în determinarea directă a posibilităţii de produse secundare în funcţie de creşterea curentă şi de volumul arboretului.

## 6. Concluzii

Pe baza observaţiei că între funcţia generatoare a unei mărimi studiate, distribuţia frecvenţelor acesteia şi relaţiile de cuantificare a modelor acestui tip de distribuţii există relaţii biunivoce, se stabilesc relaţiile funcţionale care fac posibilă reconstituirea oricăror două dintre funcţii pe baza cunoaşterii uneia singure.

Cunoaşterea separată a două sau trei elemente de mai sus face posibil controlul mai sever al ipotezelor avansate în privinţa caracteristicilor cantitative şi calitative ale variabilei studiate. Pe această bază, se stabilesc ecuaţiile generale de regresie multiplă cu aplicaţii în dendrometrie şi auxometrie pentru arboretele echiene. Aplicaţiile directe se referă la formularea şi verificarea ipotezelor privind legităţile de structurare a arboretelor în vederea stabilirii unor metode performante pentru evaluarea resurselor forestiere în scopul utilizării lor durabile.

Silvicultura poate contribui cu procedee matematice moderne la cunoaşterea calitativă a biosistemelor forestiere şi poate stabili corelaţii aparent neaşteptate cu domenii îndepărtate ale ştiinţelor naturii, cum ar fi şi cel al mecanicii cuantice sau al sistemului Solar, ceea ce furnizează argumente pentru a reafirma unitatea lumii înconjurătoare şi a legităţilor care o guvernează.

## Bibliografie


Ciucu,Gh.,V.Craiu, 1974, *Inferenţă statistică.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti

Cuculescu, loan, 1998, *Teoria probabilităţilor,* Editura ALL, Bucureşti

Giurgiu, V., 1972, *Metode ale statisticii matematice aplicate în silvicultură.* Editura CERES,Bucureşti

Giurgiu, V., 1979, *Dendrometrie si auxologie forestieră.* Editura CERES, Bucureşti Giurgiu, V., 1999, *Corelaţia dintre înălţimile şi diametrele arborilor în arboretele echiene şi pluriene din România,* în: Silvologie, voi II, Editura Academiei Române, Bucureşti

Giurgiu, V., L. lacob, ş.a., 1999, *Silvologie, voi. II,* Editura Academiei Române, Bucureşti

Iacob, L.A., 1995, *Distribuţia arborilor în biogrupe în arboretele naturale amestecatele,* în:"Bucovina forestieră", nr. I, anul IV, I.C.A.S., Câmpulung Moldovenesc

Iacob, L.A., 1995, *Procedeu de determinare a distribuţiilor unimodale cu aplicaţii în silvicultură,* în: Analele Universităţii "Ştefan cel Mare", Suceava , Secţiunea Silvicultură, vol I

Iacob, LA., 1996, *Optimizarea structurii arboretelor şi a pădurii prin metode matematice moderne în vederea stabilirii compoziţiei-ţel şi a posibilităţii.* Teză de doctorat, Universitatea "Ştefan ce Mare" Suceava

Iacob, L.A., 1998, *Procedeu de determinare a distribuţiilor unimodale cu aplicaţii în silvicultură* Simpozion I.C.A.S. Bucureşti, A.S.A.S., Bucureşti

Iacob, L.A., 1998, *Cuantificarea distribuţiilor unimodale ale caracteristicilor dendrometrice ale arboretelor echiene.* Sesiunea de comunicări ştiinţifice "Soluţii practice pentru problemele actuale ale silviculturii", I.C.A.S. Braşov

Iacob, L.A., 1999, *Cuantificarea distribuţiilor unimodale privind unele caracteristici dendrometrice ale arboretelor echiene.* Revista de Silvicultură a sud-estului Transilvaniei, nr. 1-2 (9-10), 1999, anul IV. Societatea Progresul Silvic, filialele Braşov, Covasna, Sibiu, Haarghita, Târgu Mureş

Leahu, I., 1994, *Dendrometrie,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti

Mihoc, Gn., V., Urseanu, 1977, *Sondaje şi estimaţii statistice* Editura Tehnică, Bucureşti

Mihoc, Gh., N., Micu, 1980, *Teoria probabilităţilor şi statistica matematică.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti

## Abstract

### Contributions to establish distributions and regression equations for the main dendrometric characteristics in even age stands

This paper presents a new method of dendrometric structure modeling in even age stands, based on generatrix function. This method has a large aplicability in forest fenomena modelling.


**Keywords**: auxology, dendrometry, distribution.

Dr. ing. Liviu IACOB,
Ocolul Silvic Botoşani